

DOI:10.13409/j.cnki.jdpme.20221112003

基于高维 Gumbel Copula 参数拟合估计的大型相依失效生命线网络地震动力可靠度计算*

孟祥成, 何 军

(上海交通大学船舶海洋与建筑工程学院, 上海 200240)

摘要: 城市生命线网络的地震动力可靠度是生命线工程地震风险和抗震韧性评估的重要指标。城市生命线网络地震动力可靠度的计算方法包括以蒙特卡洛方法为代表的模拟方法和以推广的递推分解算法为代表的非模拟方法, 因为后者能够给出生命线网络的主要失效模式, 因而它比模拟方法更为先进。但是, 由于存在高维 Gumbel Copula 参数无法估计的问题, 目前推广的递推分解算法还不能计算大型生命线网络(组成生命线网络系统的结构或设备数目大于60)的地震动力可靠度。为解决这个问题, 提出了高维 Gumbel Copula 参数的拟合估计公式, 将其嵌入推广的递推分解算法, 形成了大型生命线网络地震动力可靠度的计算方法。某实际 220 kV 变电站设备网络地震动力可靠度的计算和分析, 说明了此方法的使用过程、适用范围和有效性。

关键词: 生命线网络; 相依失效; 高维 Gumbel Copula; 参数估计; 地震可靠度

中图分类号: TU443 **文献标识码:** A **文章编号:** 1672-2132(2023)02-0210-12

Dynamic Reliability Calculation of Large-Sized Interdependent Lifeline Networks Based on Fitting Estimation of High-Dimensional Gumbel Copula Parameters

MENG Xiangcheng, HE Jun

(Department of Civil Engineering, School of Naval Architecture, Ocean & Civil Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: Seismic dynamic reliability of urban lifeline networks is an important index for evaluating the seismic risk and resilience of lifeline engineering. The calculation methods include the simulation method represented by the Monte Carlo method and the non-simulation method represented by the extended recursive decomposition algorithm. The latter is more advanced because it can give the main failure mode of the lifeline networks. However, due to the problem that high-dimensional Gumbel Copula parameters cannot be estimated, the current extended recursive decomposition algorithm cannot calculate the seismic dynamic reliability of large lifeline networks (the number of structures or equipment constituting the lifeline network is more than 60). To solve this problem, a fitting formula for high-dimensional Gumbel Copula parameters estimation is proposed and embedded into the extend-

* 收稿日期: 2022-11-12; 修回日期: 2022-12-17

基金项目: 国家自然科学基金项目(51978397)资助

作者简介: 孟祥成(1997—), 男, 硕士研究生。主要从事结构可靠度方面的研究。E-mail: xc_meng@sjtu.edu.cn

通讯作者: 何军(1968—), 男, 教授, 博士。主要从事结构可靠度和地震安全性方面的研究。E-mail: junhe@sjtu.edu.cn

ed recursive decomposition algorithm to form a calculation method for seismic dynamic reliability of large lifeline networks. The calculation and analysis of seismic dynamic reliability of a practical 220 kV substation equipment network show the application process, suitability and effectiveness of this method.

Keywords: lifeline network; dependent failure; high-dimensional Gumbel Copula; parameter estimation; seismic reliability

0 引言

生命线工程是对维系现代城市功能、经济发展和社会生活具有重大影响的基础性工程,如交通、通讯、供水供电、煤气和输油等工程^[1]。城市化进程不断加快,城市对生命线工程的依赖性逐渐增强,生命线工程系统的抗震性能不仅影响震后城市经济和社会生活,也对社会生活的恢复有着重要作用^[2]。在生命线工程中,生命线网络系统动力地震可靠度包括连可靠度及功能可靠度,本文主要研究在地震作用下,生命线系统的拓扑网络从源点到终点的连可靠度。生命线工程网络系统的可靠度不仅与组成单元的抗震性能有关,还需考虑各单元间的失效相关性,因此研究大型相依失效生命线网络系统动力地震可靠度计算具有重要意义。

针对大型相依失效生命线网络系统动力地震可靠度计算的复杂性和失效相关性,国内外学者展开了一系列研究。一方面,网络系统可靠度计算属于典型的 NP-Hard 问题,为降低计算量,蒙特卡洛方法、二分决策图算法、递推分解算法(RDA)及扩展的递推分解算法(e-RDA)等大型生命线网络系统地震可靠度的计算方法相继被提出。蒙特卡洛方法^[3-5]在大型失效独立网络可靠度计算中,往往能取得理想的效果,但存在计算量大,收敛性差等局限;二分决策图算法^[6-7]当网络规模较大时,适应性较差,而且网络拓扑形式越复杂,计算量越大,甚至根本无法求解;递推分解算法^[8-10]及扩展的递推分解算法^[11]从系统的一个最小路开始分解,递推得到下一个互斥最小路,并且通过递推过程中产生的不连通子图,可以得到互补的结构函数,从而利用概率不等式计算给出系统可靠度的上界和下界,还可以通过设定误差控制计算时间,得到近似解,因此对于大型网络系统具有更好的适应性。另一方面,网络系统的失效相关性主要通过计算系统不交最小路(割)联合失效概率来估计,目前主要的方法有顺

序复合(SC)方法和 Gumbel Copula 算法等。SC 方法^[12]主要由“与”合并和“或”合并两种运算组成,将系统网络化简至一个点,由最终化简得到的节点可靠度估计系统可靠度,SC 方法的缺陷是,当系统元件相关系数大于 0.9 时,无法给出系统元件相关系数的计算结果;Gumbel Copula 算法通过引入 Gumbel Copula 函数计算不交最小路(割)的联合失效概率,同等条件下,计算过程更为简洁,计算时间低于 SC 算法,具有更好的实用性^[13]。但 Gumbel Copula 参数的维数与系统组成单元数有关,在系统规模较大时,单元众多,进行高维 Gumbel Copula 参数估计存在计算过程复杂,计算时间长,甚至无法计算的问题。

为了解决相依失效生命线网络动力地震可靠度计算中的高维 Gumbel Copula 参数估计难题,本文提出了关于秩相依系数 Kendall's tau 的外推公式,以进行高维($n > 60$)Gumbel Copula 参数的有效估计。基于高维 Gumbel Copula 参数的近似估计,计算生命线网络不交最小路(割)的联合发生概率,将联合概率计算公式代入递推分解算法,发展出大型相依失效生命线网络动力地震可靠度的有效计算方法。通过某实际 220 kV 变电站设备网络地震动力可靠度的计算和分析,说明了此方法的使用过程、适用范围和有效性。

1 高维 Gumbel Copula 参数估计的外推公式

1.1 单参数 Gumbel-Copula 简介

Copula 函数由 Sklar 提出,是一类满足特定条件的函数的总称,能够将多维随机变量的联合分布用其一维边缘分布表示^[14]。Gumbel Copula 是 Copula 函数的一种,目前已经被广泛应用于金融分析、气象和水文、统计、环境、工程抗震以及结构可靠度分析等众多领域。单参数 Gumbel Copula 构造简单,对于工程结构具有很好的适用性。

Gumbel Copula的表达式如下:

$$C = \exp\left(-\left(\sum_{i=1}^n (-\ln u_i)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}\right) \quad (1)$$

式中, u_i 表示结构响应的分布函数; θ 为模型参数, 用来描述变量间的相关性, 当 $\theta = 1$ 时, 表示变量间为独立关系, 当 $\theta = \infty$ 时, 表示变量间完全依赖。

由上式可知, 建立 Gumbel Copula 函数包含结构响应分布模型的建立和函数参数估计两部分。对于结构响应分布模型, 可由广义极值(GEV)分布模型构建; 对于函数参数的估计, 极大似然法、非参数估计方法都无法很好地适用大型复杂系统可靠度计算^[15-16], 而运用矩方法进行参数估计原理简单, 对于大型复杂系统适用性强。其中, 常用的矩方法为基于 Kendall's tau 的 Gumbel Copula 函数参数估计方法。

1.2 基于 Kendall's tau 的 Gumbel Copula 参数估计

基于 Kendall's tau 的 Gumbel Copula 函数参数估计方法的基本思想是对于已知的充足样本数, 令基于样本的 Kendall's tau 与基于总体的 Kendall's tau 相等, 进而通过等式计算, 求解出待估参数^[17]。

秩相依系数 Kendall's tau 是用来表征随机变量之间相关性的一种参数, 其基本概念为:

令 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 为随机变量 (X, Y) 的 N 组观测值样本, 任意抽取两组观测值 (x_i, y_i) 和 (x_j, y_j) , 若 $(x_i, y_i)(x_j, y_j) > 0$, 则称两组观测值是和谐的, 此时 X 和 Y 正相关; 反之, 则称两组观测值不和谐, X 和 Y 负相关。

对于 n 维 Gumbel Copula $C_\theta = (u)$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, 其样本秩相依系数 Kendall's tau 的计算公式为:

$$\hat{\tau}_n = \frac{1}{2^{n-1} - 1} \left[2^n \int_{[0,1]^n} C(u) dC(u) - 1 \right] \quad (2)$$

若样本数 N 已知, 该公式可以简化如下:

$$\hat{\tau}_n = \frac{1}{2^{n-1} - 1} \left[\frac{2^N}{2^{N-1} - 1} \sum_{i \neq j} I(x_i \leq x_j) - 1 \right] \quad (3)$$

式中, n 为变量维数; N 为样本数; $u_i = F_{x_i}(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, 其中 $F_{x_i}(x_i)$ 为第 i 个变量 X_i 所对应的边缘分布函数; $I(A)$ 是 A 的函数指标, 若 A 为真, $I(A)$ 为 1, 反之 $I(A)$ 为 0。

总体秩相依系数 Kendall's tau 的计算公式为:

$$\tau_n(\theta) =$$

$$\frac{1}{2^{n-1} - 1} \left[-1 + 2^{n-1} \sum C_{m_1, m_2, \dots, m_n} \frac{(m-1)!}{(n-1)!} \times \left(\frac{1}{2\theta} \right)^{m-1} \prod_{q=1}^n \left\{ \frac{\Gamma(q-1/\theta)}{\Gamma(1-1/\theta)\theta} \right\}^{mq} \right] \quad (4)$$

式中, m_1, m_2, \dots, m_n 为整数; $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$; $n = m_1 + 2m_2 + \dots + nm_n$;

$$C_{m_1, m_2, \dots, m_n} = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_n!} \frac{1}{(1!)^{m_1} \dots (n!)^{m_n}} \quad (5)$$

通过 $\hat{\tau}_n = \tau_n$ 等式就可以估计出 Gumbel Copula 中参数 θ 。

使用通用数学软件 Mathematica, 以假设样本秩相依系数 Kendall's tau $\hat{\tau}_n = 0.1$ 为例, 使用上述方法对维度为 10、20、30、40、50、60 的参数 θ 进行估计, 发现计算时间随维数的不断扩大而显著增加, 具体计算用时情况见表 1。

表 1 不同维数计算用时情况

维数	10	20	30	40	50	60
用时/s	1	3.7	45.3	462	2 266	13 429

由表 1 可以看出, 在高维参数估计时, 随着参数维度的增加, 总体的 $\tau_n(\theta)$ 计算复杂程度快速增加, 程序运行时间不断延长, 在维数 $n > 60$ 时, 由于计算时间过长, 可能出现计算终止的情况。大型生命线工程系统通常包含上百个元件, 现有基于 Kendall's tau 的 Gumbel Copula 函数参数估计方法无法在有限时间内实现高维 Gumbel Copula 函数参数的估计, 需要一种有效的高维参数 θ 的估计方法。

1.3 Gumbel Copula 参数估计的外推公式

首先基于 Kendall's tau 的 Gumbel Copula 参数估计方法计算得出在低维情况下, 不同维数 n 对应参数 θ 的估计值, 选择合适的拟合方程基本形式, 对所得数据进行非线性拟合, 得出拟合方程的各项系数, 从而建立 Gumbel Copula 参数 θ 估计的外推公式。下面详细介绍外推公式的建立过程。

对于参数维数在 10~35 区间内, 对应不同秩相依系数 $\hat{\tau}_n$, 使用基于 Kendall's tau 的 Gumbel Copula 函数参数估计方法, 将相应的 $\hat{\tau}_n$ 代替 τ_n 代入公式 (4) 中, 得到 θ 的估计值, 计算结果见表 2。对表 2 中每一组结果, 选定 $y = A_1 \times \exp(-x/t_1) + y_0$ 作为拟

合曲线方程的基本形式进行非线性拟合,拟合结果 如图1、表3所示。

表2 不同 $\hat{\tau}_n$ 情况下 θ 值计算结果
Table 2 Calculation results of θ for different $\hat{\tau}_n$

$\hat{\tau}_n$	0.01	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45
$n=10$	1.030 2	1.138 4	1.263 9	1.389 8	1.521 8	1.664 0	1.820 5	1.995 8	2.195 6	2.427 2
$n=15$	1.051 6	1.208 3	1.371 4	1.527 6	1.687 6	1.857 5	2.042 8	2.248 8	2.482 4	2.752 1
$n=20$	1.070 6	1.262 7	1.451 5	1.628 5	1.807 8	1.997 1	2.202 4	2.430 0	2.687 3	2.983 8
$n=25$	1.087 3	1.306 7	1.514 7	1.707 5	1.901 5	2.105 5	2.326 1	2.570 3	2.845 8	3.162 9
$n=30$	1.102 3	1.343 6	1.567 1	1.772 4	1.978 3	2.194 2	2.427 3	2.684 8	2.975 1	3.308 9
$n=35$	1.115 9	1.375 6	1.611 8	1.827 7	2.043 5	2.269 3	2.512 8	2.781 5	3.084 3	3.432 2
$\hat{\tau}_n$	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95
$n=10$	2.700 8	3.030 9	3.439 1	3.959 3	4.647 7	5.605 8	7.036 0	9.410 8	14.147 6	28.332 6
$n=15$	3.069 6	3.451 7	3.923 2	4.523 0	5.315 7	6.417 7	8.061 2	10.788 3	16.225 0	32.500 7
$n=20$	3.332 4	3.751 2	4.267 5	4.923 6	5.790 2	6.994 1	8.788 8	11.765 7	17.698 8	35.457 5
$n=25$	3.535 3	3.982 4	4.533 2	5.232 7	6.156 2	7.438 6	9.349 9	12.519 3	18.835 2	37.737 3
$n=30$	3.700 7	4.170 8	4.749 5	5.484 4	6.454 1	7.800 5	9.806 5	13.132 7	19.759 9	39.592 4
$n=35$	3.840 2	4.329 7	4.932 0	5.696 6	6.705 4	8.105 6	10.191 6	13.649 8	20.539 5	41.156 4

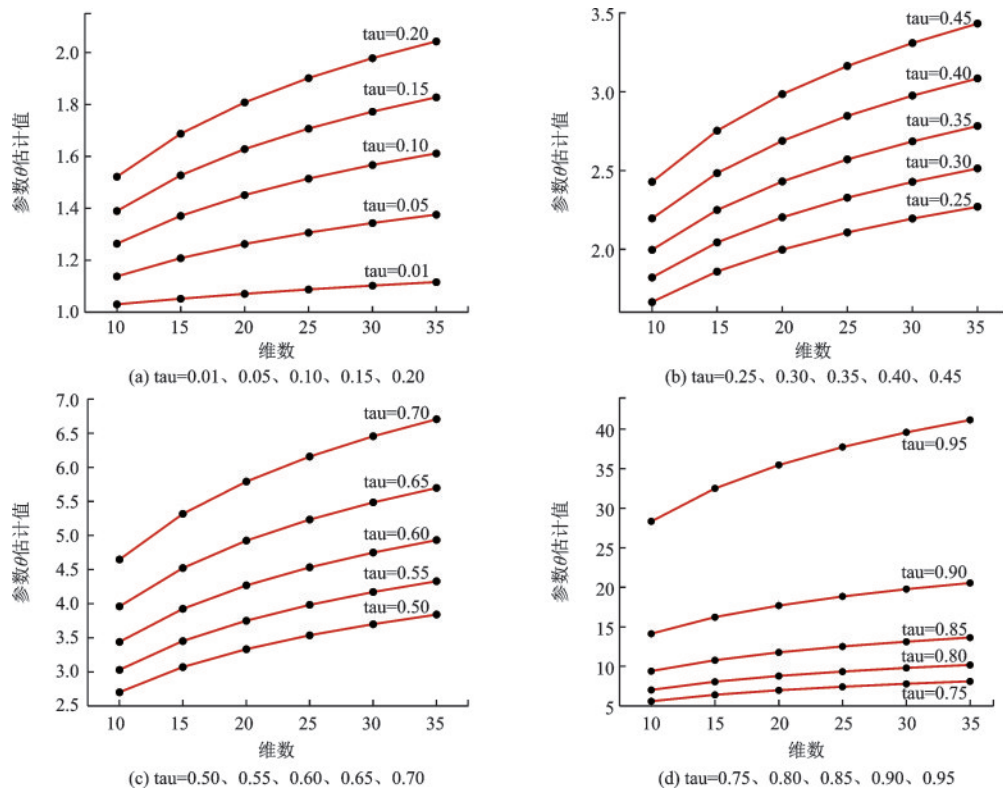


图1 不同 $\hat{\tau}_n$ 的非线性拟合曲线

Fig.1 Nonlinear fitting curves for different $\hat{\tau}_n$

表3 不同 $\hat{\tau}_n$ 的拟合效果
Table 3 Fitting effectiveness for different $\hat{\tau}_n$

$\hat{\tau}_n$	0.01	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45
R平方	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 8	0.999 8	0.999 7	0.999 7	0.999 7	0.999 7	0.999 7
$\hat{\tau}_n$	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95
R平方	0.999 7	0.999 7	0.999 7	0.999 7	0.999 7	0.999 7	0.999 7	0.999 7	0.999 7	0.999 7

由图1、表3可以看出,表征拟合效果的R平方值均大于0.999,拟合效果较好,说明在不同 $\hat{\tau}_n$ 情况下,Gumbel Copula参数估计值 θ 与其维数 n 之间存在一定的非线性关系,该关系可用以下公式描述:

$$\theta = A_1 \times \exp\left(-\frac{n}{t_1}\right) + y_0 \quad (6)$$

式中, A_1, t_1, y_0 为外推公式系数; n 为参数维数。

通过该方程外推取值可以得到维度 $n > 60$ 时 θ 的估计值。不同 $\hat{\tau}_n$ 情况下, θ 参数估计的外推公式各项系数见表4。因此对于高维Gumbel Copula参数 θ ,可首先计算得出基于样本的秩相依系数 $\hat{\tau}_n$,选取合适的外推公式各项系数,建立参数 θ 外推公式进行估计。

表4 θ 估计的外推公式系数

Table 4 Extrapolation formula coefficient for θ estimation

$\hat{\tau}_n$	0.01	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45
y_0	1.225 0	1.508 0	1.770 7	2.012 3	2.254 4	2.507 6	2.780 5	3.081 6	3.420 6	3.809 8
A_1	-0.245 5	-0.554 3	-0.799 5	-1.002 9	-1.193 7	-1.384 4	-1.583 0	-1.796 5	-2.031 9	-2.297 8
t_1	43.212 0	24.575 3	21.810 7	20.845 2	20.358 0	20.063 6	19.870 9	19.734 9	19.635 9	19.561 5
$\hat{\tau}_n$	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95
y_0	4.266 1	4.813 0	5.485 7	6.339 2	7.464 8	9.026 7	11.352 8	15.208 1	22.887 5	45.865 8
A_1	-2.605 2	-2.969 5	-3.413 4	-3.972 3	-4.704 7	-5.715 7	-7.215 1	-9.692 1	-14.614 8	-29.321 0
t_1	19.504 2	19.459 0	19.423 7	19.395 2	19.373 3	19.356 0	19.343 1	19.332 2	19.324 7	19.321 8

为验证拟合公式的有效性,根据外推公式算得 $n = 60$,参数 θ 估计的近似值 θ_1 ,与通过整体秩相依

系数公式计算得到 θ 估计的准确值 θ_2 进行比较,结果对比见表5。

表5 结果误差分析

Table 5 Result error analysis

$\hat{\tau}_n$	θ_1	θ_2	误差/%
0.1	1.769 2	1.771 3	0.12
0.2	2.253 0	2.272 8	0.87
0.3	2.778 9	2.812 3	1.19
0.4	3.418 7	3.465 8	1.36
0.5	4.263 8	4.327 2	1.46
0.6	5.482 7	5.568 2	1.54
0.7	7.460 8	7.580 7	1.58
0.8	11.346 7	11.532 4	1.61
0.9	22.875 3	23.253 7	1.63

由上表可以看出,通过外推公式所得近似值与准确值的误差随着秩相依系数的增大而呈现增大趋势,但最大误差不超过2.00%,且通过外推公式进行Gumbel Copula参数估计能够避免计算基于整体秩相依系数时计算复杂甚至不能计算的问题,提高了计算效率,扩大了能够估计的参数 θ 的维度,对于高维Gumbel Copula参数估计具有有效性。

网络动力地震可靠度的有效方法,该方法通过广义极值(GEV)分布模型估计系统元件极值地震响应的概率分布,通过Gumbel Copula函数估计不交最小路(割)的联合失效概率,最后将联合失效概率计算结果引入RDA算法中得到系统网络的可靠度。其中,不交最小路(割)的联合失效概率是反映系统失效相关性的关键,其计算效率对整个系统网络可靠度的计算效率有重要影响。

2 基于高维 Gumbel Copula 的递推分解算法

2.1 e-RDA 算法简介

e-RDA算法是用于计算大型相依失效生命线

根据e-RDA算法,点权网络可由 $G(V, E)$ 表示, V 和 E 分别表示网络节点和连接的边。结构函数可用 $\Phi(x)$ 表示,系统运行正常与失效分别取值1或0。引入最小路 n_p 的集合 $P(1), \dots, P(n_p)$,最小割 n_k 的集合 $K(1), \dots, K(n_k)$ 后, $\Phi(x)$ 可表示为:

$$\Phi(x) = \bigcup_{s=1}^{n_p} \prod_{i \in P(s)} x_i \quad (7)$$

或者

$$\Phi(x) = 1 - \bigcup_{t=1}^{n_k} \prod_{j \in K(t)} (1 - x_j) \quad (8)$$

式中, $\prod_{i \in P(s)} x_i$ 和 $\prod_{j \in K(t)} (1 - x_j)$ 为 $P(s)$ 和 $K(t)$ 的结构函数; $(1 - x_j)$ 为 x_j 的补。

令网络节点的可靠度 $r_i = E(x_i)$, 则系统可靠度可表示为:

$$R = E(\Phi(x)) = E\left(\bigcup_{s=1}^{n_p} \prod_{i \in P(s)} x_i\right) \quad (9)$$

或者

$$R = E(\Phi(x)) = 1 - E\left(\bigcup_{t=1}^{n_k} \prod_{j \in K(t)} (1 - x_j)\right) \quad (10)$$

令 $x_1 = (x_{11}, \dots, x_{1n_1}) \subset x$ 是 $P(1)$ 的一个分向量集, 那么

$$\begin{aligned} \Phi(x) = & \prod_{j=1}^{n_1} x_{1j} + (1 - x_{11}) \Phi(x_1^{(-x_{11})}) + \\ & x_{11}(1 - x_{12}) \Phi(x_1^{(-x_{12})}) + \dots + \\ & x_{11} \dots x_{1(n_1-1)} (1 - x_{1n_1}) \Phi(x_1^{(-x_{1n_1})}) \end{aligned} \quad (11)$$

式中, $\Phi(x_1^{(-x_{1j})})$, $j = 1, \dots, n_1$, 表示除 x_{1j} 及与其相连边的子图 $G(V_{1j}, E_{1j})$ 的结构函数。

对于每一个子图 $G(V_{1j}, E_{1j})$ 继续搜索最小路, 如果存在最小路, 则对于其结构函数继续利用式(7)和式(11)进行分解。如果子图 $G(V_{1j}, E_{1j})$ 已经不存在最小路, 式(11)中, 在 $\Phi(x_1^{(-x_{1j})})$ 之前的部分即为 $G(V, E)$ 的不交最小割, 同时, 子图 $G(V_{1j}, E_{1j})$ 对应的结构函数可以从式(11)中删掉。式(11)中剩余部分, 即为部分不交最小路的结构函

数, 可利用此部分计算出网络可靠度的下界。同样, 可通过获得的不交最小割的结构函数计算网络可靠度的上界。根据上述过程, 不断进行递推分解, 可得到全部的不交最小路和不交最小割, 从而得到系统网络可靠度的计算结果。

$$\begin{aligned} R = E(\Phi(x)) = & E\left(\prod_{j=1}^{n_1} x_{1j}\right) + E\left(\prod_{j=1}^{n_2} x_{2j} \prod_{k=1}^{m_2} (1 - x_{2k})\right) + \dots + \\ & E\left(\prod_{j=1}^{n_{DP}} x_{DPj} \prod_{k=1}^{m_{DP}} (1 - x_{m_{DP}k})\right) \end{aligned} \quad (12)$$

式中, DP 为不交最小路的总数; n_i , $i = 1, \dots, DP$ 和 m_i , $i = 2, \dots, DP$ 分别为递推分解完成后, 公式中第 i 个结构函数变量个数及其补集的变量个数。

系统网络可靠度也可以用不交最小割表示为:

$$\begin{aligned} R = 1 - E\left(\prod_{j=1}^{s_1} x_{1j} \prod_{k=1}^{t_1} (1 - x_{1k})\right) - \dots - \\ E\left(\prod_{j=1}^{s_{DK}} x_{s_{DK}j} \prod_{k=1}^{t_{DK}} (1 - x_{t_{DK}k})\right) \end{aligned} \quad (13)$$

式中, DK 为不交最小割的总数; s_i , $i = 1, \dots, DK$ 和 t_i , $i = 1, \dots, DK$ 分别为递推分解完成后获得的不交最小割中, 第 i 个结构函数的变量个数及其补集中变量的个数。

对于较为大型的系统, 上述过程不可能在有限的时间内完全进行, 但利用上述公式(12)、(13)可以给出系统网络可靠度的上界 R_U 和下界 R_L , 此时取其中值 $R = 0.5(R_U + R_L)$ 作为系统可靠度的近似值, 最大误差不超过 $0.5(R_U - R_L)$ 。

2.2 基于高维 Gumbel Copula 的不交最小路(割)的联合概率计算

根据 e-RDA 算法, 不交最小路(割)的联合概率可由以下公式计算:

$$\begin{aligned} E(\xi(x, y)) = & E(x_1 \dots x_{O_x} (1 - x_{O_x+1}) \dots (1 - x_{O_x+F_x}) y_1 \dots y_{O_y} (1 - y_{O_y+1}) \dots (1 - y_{O_y+F_y})) = \\ & P(Z_1 \leq b_1, \dots, Z_{O_x} \leq b_{O_x}, Z_{O_x+1} > b_{O_x+1}, \dots, Z_{O_x+F_x} > b_{O_x+F_x}, Z_{O_x+F_x+1} \leq \infty, Z_m \leq \infty, Z_{m+1} \leq b_{m+1}, \dots, \\ & Z_{m+O_y} \leq b_{m+O_y}, Z_{m+O_y+1} > b_{m+O_y+1}, \dots, Z_{m+O_y+F_y} > b_{m+O_y+F_y}, Z_{m+O_y+F_y+1} \leq \infty, Z_{m+n} \leq \infty) = \\ & F_{Z_1 \dots Z_{m+n}}(b_1, \dots, b_{O_x}, \infty, \dots, \infty, b_{m+1}, \dots, b_{m+O_y}, \infty, \dots, \infty) - \\ & \sum_{\substack{O_x+1 \leq i \leq O_x+F_x \text{ or} \\ m+O_y+1 \leq i \leq m+O_y+F_y}} F_{Z_1 \dots Z_{m+n}}(b_1, \dots, b_{O_x}, \infty, \dots, \infty, b_i, \infty, \dots, \infty, b_{m+1}, \dots, b_{m+O_y}, \infty, \dots, \infty) + \\ & \sum_{\substack{O_x+1 \leq i < j \leq O_x+F_x \text{ or} \\ m+O_y+1 \leq i < j \leq m+O_y+F_y}} F_{Z_1 \dots Z_{m+n}}(b_1, \dots, b_{O_x}, \infty, \dots, \infty, b_i, \infty, \dots, \infty, b_j, \infty, \dots, \infty, b_{m+1}, \dots, b_{m+O_y}, \infty, \dots, \infty) \dots \\ & (-1)^{F_x+F_y} F_{Z_1 \dots Z_{m+n}}(b_1, \dots, b_{O_x+F_x}, \infty, \dots, \infty, b_{m+1}, \dots, b_{m+O_y+F_y}, \infty, \dots, \infty) \end{aligned} \quad (14)$$

式中, $x_i, i=1, \dots, m$ 和 $y_j, j=1, \dots, n$ 分别表示网络中节点和边的状态变量; m 和 n 分别表示网络中全部节点数和边数; O_x 为运行正常节点个数, F_x 为失效节点个数; b_i 和 b_{m+j} 分别表示网络中节点和边的临界值; $F_{Z_i}(Z_i)$ 和 $F_{Z_{m+j}}(Z_j)$ 是 Z_i 和 Z_{m+j} 的累积分布函数, $Z_i = \max_{0 \leq \tau \leq T} X_i(\tau)$, $Z_{m+j} = \max_{0 \leq \tau \leq T} Y_i(\tau)$, $X_i(\tau)$ 和 $Y_i(\tau)$, $\tau \in [0, T]$ 为系统网络中节点和边的非线性随机地震响应。

将多元 Gumbel Copula 引入不交最小路(割)的联合概率计算公式可得:

$$F_{Z_1 \dots Z_{m+n}}(Z_1 \dots Z_{m+n}) = \exp \left\{ - \left[(-\log u_1)^\theta + \dots + (-\log u_{m+n})^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \quad (15)$$

式中, $u_i = F_{Z_i}(Z_i)$, $i=1, \dots, m+n$; θ 为表征相关性的 $m+n$ 维随机变量。

由上式可知, 基于高维 Gumbel Copula 的不交最小路(割)的联合概率计算主要包括系统元件极值地震响应概率分布模型的建立和 Gumbel Copula 参数的估计。

首先可应用广义极值(GEV)分布模型估计系统元件极值地震响应概率分布, 生成元件地震响应样本:

$$F_{Z_i}(Z_i) = \exp \left\{ - \left[1 + \xi_i \left(\frac{z_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^{-\frac{1}{\xi_i}} \right] \right\} \quad (16)$$

式中, $i=1, \dots, m+n$, $\left\{ z_i: 1 + \xi_i(z_i - \mu_i)/\sigma_i > 0 \right\}$, $\mu_i \in \mathcal{R}$, $\sigma_i > 0$, $\xi_i \in \mathcal{R}$, 分别为位置、尺寸和形状参数, 估计值可由最大似然法给出。似然函数为:

$$\mathcal{L}(\mu_i, \sigma_i, \xi_i) = -\mu_i \log \sigma_i - \left(1 + \frac{1}{\xi_i} \right) \sum_{i=1}^N \log \left[1 + \frac{\xi_i(z_i - \mu_i)}{\sigma_i} \right] - \sum_{i=1}^N \left[1 + \frac{\xi_i(z_i - \mu_i)}{\sigma_i} \right]^{-\frac{1}{\xi_i}} \quad (17)$$

使似然函数最大化的变量 $(\hat{\mu}_i, \hat{\sigma}_i, \hat{\xi}_i)$ 为广义极值分布模型参数的最大似然估计值。

其次, 基于得到的地震响应样本, 通过式(4)和(5)计算元件极值响应的秩相依系数 Kendall's tau, 通过所得计算值确定表4中与之最接近的两个秩相依系数, 框定外推公式系数的区间范围, 在区间内采用插值法确定外推公式的各项系数, 进而对 $m+$

n 维 Gumbel Copula 参数 θ 进行估计, 建立元件多变量极值的 Gumbel Copula 模型。

最后将建立的 Gumbel Copula 模型结合式(15), 得到不交最小路(割)的联合概率计算公式:

$$E(\eta_p(x, y)) = E \left(\prod_{i \in i_p} x_i \prod_{j \in j_p} y_j \right) = \exp \left\{ - \sum_{i \in i_p} (-\log u_i)^\theta - \sum_{j \in j_p} (-\log u_j)^\theta - (-\log 1)^\theta - \dots - (-\log 1)^\theta \right\} = \exp \left\{ - \left[\sum_{i \in i_p} (-\log u_i)^\theta + \sum_{j \in j_p} (-\log u_j)^\theta \right] \right\} \quad (18)$$

通过外推公式得到高维 Gumbel Copula 参数的估计值能够避免进行系统整体秩相依系数 Kendall's tau 的计算, 解决了高维 Gumbel Copula 参数估计的有效计算问题, 通过建立的 Gumbel Copula 函数, 结合不交最小路(割)的联合失效概率的计算, 使原本 e-RDA 算法所能计算的系统规模得到扩大, 扩展了算法应用范围。

3 某实际 220 kV 变电站一次设备(支架)网络的地震可靠度计算

3.1 变电站一次设备(支架)的网络模型

此 220 kV 变电站为东部某市 2021 年建设项目, 共有 4 个 220 kV 入线端、5 个 110 kV 出线端及 13 个 10 kV 出线端, 有变压器、电压互感器、电流互感器、断路器、隔离开关等一次设备共计 136 个, 变电站具体设备情况见表 6。

系统网络模型的建立是变电站系统可靠度分析的第一步, 主要包括确定网络的类型和绘制系统网络图。变电站中一次设备(支架)的地震可靠度对于变电站整体可靠度的影响远大于设备间的连接线, 且变电站中电流流向是确定的, 因此将此 220 kV 变电站一次设备(支架)系统确定为有向点权网络, 绘制网络如图 2 所示。

系统网络模型共有节点 137 个, 有向线路 304 条。其中节点 6-118 为变电站各一次设备(支架), 节点 2-5 为变电站 4 个 220 kV 入线端, 节点 119-123、130-136 为变电站 13 个 10 kV 出线端, 节点 124-128 为变电站 5 个 110 kV 出线端, 为多源点多汇点网络。为将多源点多汇点网络转化为两终端

表6 变电站设备编号

Table 6 Substation equipment

节点编号	设备类型	节点编号	设备类型	节点编号	设备类型	节点编号	设备类型
2	220 kv 入线端	36	隔离开关	70	隔离开关	104	电流互感器
3	220 kv 入线端	37	电流互感器	71	隔离开关	105	电流互感器
4	220 kv 入线端	38	隔离开关	72	隔离开关	106	电流互感器
5	220 kv 入线端	39	隔离开关	73	隔离开关	107	电流互感器
6	电压互感器	40	电流互感器	74	隔离开关	108	电流互感器
7	电压互感器	41	断路器	75	隔离开关	109	隔离开关
8	电压互感器	42	电流互感器	76	断路器	110	隔离开关
9	电压互感器	43	断路器	77	电流互感器	111	隔离开关
10	隔离开关	44	断路器	78	断路器	112	隔离开关
11	隔离开关	45	电流互感器	79	电流互感器	113	隔离开关
12	隔离开关	46	断路器	80	断路器	114	电压互感器
13	隔离开关	47	电流互感器	81	电流互感器	115	电压互感器
14	电流互感器	48	断路器	82	断路器	116	电压互感器
15	电流互感器	49	电流互感器	83	电流互感器	117	电压互感器
16	电流互感器	50	断路器	84	断路器	118	电压互感器
17	电流互感器	51	电流互感器	85	电流互感器	119	10 kV 入线端
18	隔离开关	52	断路器	86	断路器	120	10 kV 入线端
19	隔离开关	53	电流互感器	87	电流互感器	121	10 kV 入线端
20	隔离开关	54	隔离开关	88	电流互感器	122	10 kV 入线端
21	隔离开关	55	隔离开关	89	断路器	123	10 kV 入线端
22	隔离开关	56	隔离开关	90	断路器	124	110 kV 入线端
23	隔离开关	57	隔离开关	91	电流互感器	125	110 kV 入线端
24	隔离开关	58	隔离开关	92	断路器	126	110 kV 入线端
25	隔离开关	59	隔离开关	93	电流互感器	127	110 kV 入线端
26	隔离开关	60	隔离开关	94	隔离开关	128	110 kV 入线端
27	断路器	61	隔离开关	95	隔离开关	129	10 kV 入线端
28	电流互感器	62	隔离开关	96	隔离开关	130	10 kV 入线端
29	隔离开关	63	隔离开关	97	隔离开关	131	10 kV 入线端
30	隔离开关	64	隔离开关	98	隔离开关	132	10 kV 入线端
31	隔离开关	65	隔离开关	99	隔离开关	133	10 kV 入线端
32	断路器	66	隔离开关	100	隔离开关	134	10 kV 入线端
33	电流互感器	67	隔离开关	101	隔离开关	135	10 kV 入线端
34	隔离开关	68	隔离开关	102	隔离开关	136	10 kV 入线端
35	变压器	69	隔离开关	103	隔离开关		

网络可靠度问题,设一虚拟顶点1,用4条指向节点2-5的有向线路与入线端2-5相连;设一虚拟顶点137,用18条指向节点119-136的有向线路与节点119-136相连。根据已经确定的网络类型和网络图,采用邻接向量矩阵将网络模型存储在计算机中。

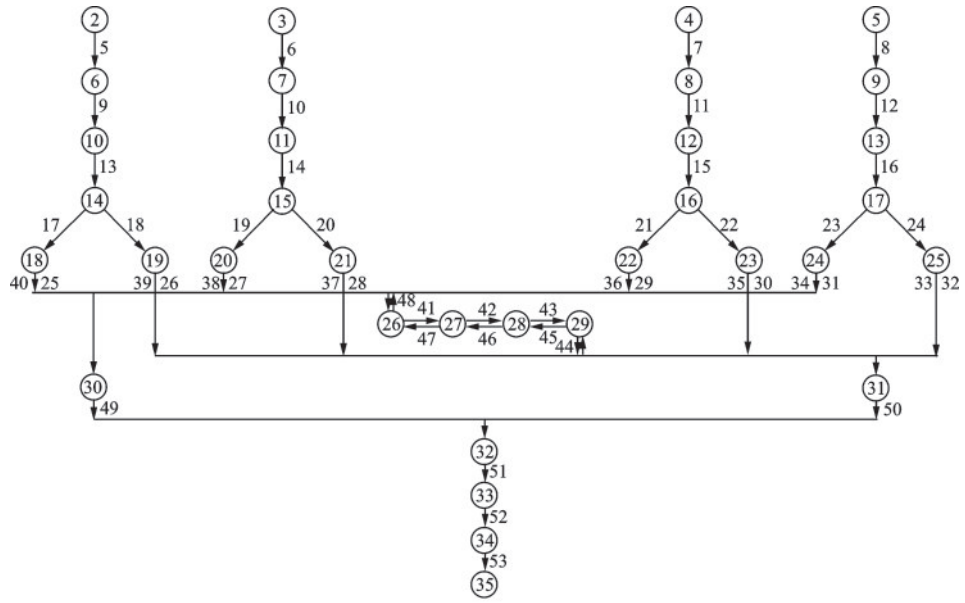
3.2 网络动力地震可靠度计算结果及其分析

变电站系统各设备单体的失效可定义为其非

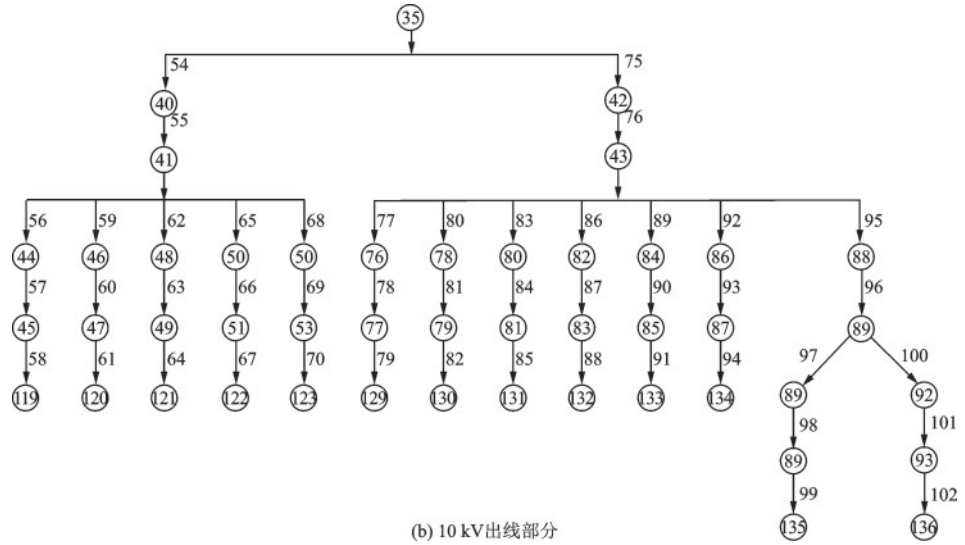
线性随机地震响应在参考持续时间 T 内首次超过临界阈值水平的状态。其动力地震可靠度可表示为:

$$r_i = E(x_i) = 1 - P\{\exists \tau \in [0, T]: X_i(\tau) > b_i\} = F_{Z_i}(b_i) \quad (19)$$

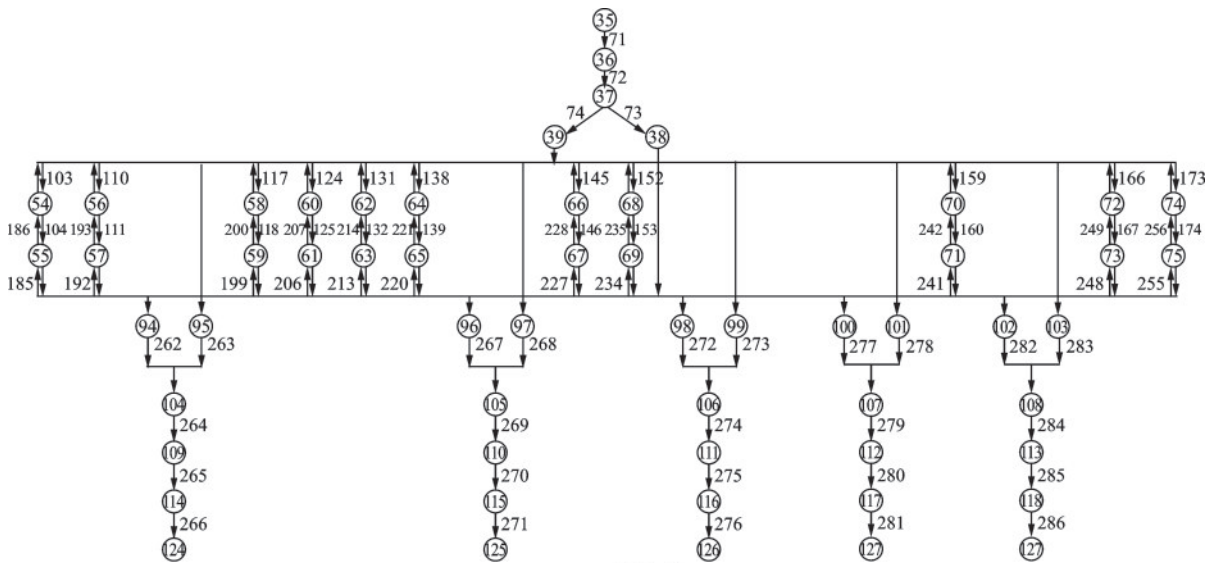
式中, $X_i(\tau)$, $i = 1, \dots, m$ 为设备单体的非线性随机地震响应; b_i 为设备单体的临界阈值水平; $Z_i = \max_{0 \leq \tau \leq T} X_i(\tau)$ 为 $X_i(\tau)$ 的极值; $F_{Z_i}(Z_i)$ 为 Z_i 的累积分布函数。



(a) 220 kV 入线部分



(b) 10 kV 出线部分



(c) 110 kV 出线部分

图2 220 kV 变电站一次设备系统网络图

Fig.2 Primary equipment system network diagram of 220 kV substations

此变电站系统设备数量和种类众多,且每个设备及其支架的极值地震响应分析是极值庞大的计算工作。本文重点在于验证所提方法的有效性,因此为简化计算,以假定元件秩相依系数 $\hat{\tau}_n=0.01$ 、 $\hat{\tau}_n=0.05$ 、 $\hat{\tau}_n=0.3$ 为例进行计算,假设各元件地震可靠度为正态分布($\mu=0.9, \sigma=0.05$)。另外,节点1、137为虚拟节点,节点2~5为系统入线端、节点119~136为出线端,假设其为可靠的,可靠度取为1。假设同一类型设备为同一厂家同一批生产,具有相同抗震特性,因此可靠度取相同值,具体见表7。

对于此220 kV变电站点权系统网络,Gumbel

Copula参数 θ 维数为系统全部节点数,即 $n=137$,根据秩相依系数选取外推公式系数,对于 $n=137$ 时参数 θ 进行估计,建立Gumbel Copula函数,再根据不交最小路(割)联合概率计算公式得到系统网络可靠度计算结果见表8。

上述计算表明,通过本文所得外推公式估计高维Gumbel Copula参数,结合e-RDA算法,进行不交最小路(割)的联合失效概率计算,能够对不同相依系数的大型生命线系统网络进行相依失效动力地震可靠度的计算,扩大了原方法能够计算的系统规模,具有一定的实用性。

表7 网络节点可靠度值

Table 7 Reliability values of network nodes

节点编号	可靠度	节点编号	可靠度	节点编号	可靠度	节点编号	可靠度
2	1.000 0	32	0.938 6	61	0.932 3	90	0.938 6
3	1.000 0	33	0.920 0	62	0.932 3	91	0.920 0
4	1.000 0	34	0.932 3	63	0.932 3	92	0.938 6
5	1.000 0	35	0.898 1	64	0.932 3	93	0.920 0
6	0.894 1	36	0.932 3	65	0.932 3	94	0.932 3
7	0.894 1	37	0.920 0	66	0.932 3	95	0.932 3
8	0.894 1	38	0.932 3	67	0.932 3	96	0.932 3
9	0.894 1	39	0.932 3	68	0.932 3	97	0.932 3
10	0.932 3	40	0.920 0	69	0.932 3	98	0.932 3
11	0.932 3	41	0.938 6	70	0.932 3	99	0.932 3
12	0.932 3	42	0.920 0	71	0.932 3	100	0.932 3
13	0.932 3	43	0.938 6	72	0.932 3	101	0.932 3
14	0.920 0	44	0.938 6	73	0.932 3	102	0.932 3
15	0.920 0	45	0.920 0	74	0.932 3	103	0.932 3
16	0.920 0	46	0.938 6	75	0.932 3	104	0.920 0
17	0.920 0	47	0.920 0	76	0.938 6	105	0.920 0
18	0.932 3	48	0.938 6	77	0.920 0	106	0.920 0
19	0.932 3	49	0.920 0	78	0.938 6	107	0.920 0
20	0.932 3	50	0.938 6	79	0.920 0	108	0.920 0
21	0.932 3	51	0.920 0	80	0.938 6	109	0.932 3
22	0.932 3	52	0.938 6	81	0.920 0	110	0.932 3
23	0.932 3	53	0.920 0	82	0.938 6	111	0.932 3
24	0.932 3	54	0.932 3	83	0.920 0	112	0.932 3
25	0.932 3	55	0.932 3	84	0.938 6	113	0.932 3
26	0.932 3	56	0.932 3	85	0.920 0	114	0.894 1
27	0.938 6	57	0.932 3	86	0.938 6	115	0.894 1
28	0.920 0	58	0.932 3	87	0.920 0	116	0.894 1
29	0.932 3	59	0.932 3	88	0.920 0	117	0.894 1
30	0.932 3	60	0.932 3	89	0.938 6	118	0.894 1
31	0.932 3						

表8 参数估计及可靠度计算结果
Table 8 Parameter estimation results

秩相依系数	0.01	0.05	0.1	0.3	0.7
y_0	1.225 0	1.508 0	1.770 7	2.780 5	7.464 8
A_1	-0.245 5	-0.554 3	-0.799 5	-1.583 0	-4.704 7
t_1	43.212 0	24.575 3	21.810 7	19.870 9	19.373 3
θ 估计值	1.214 7	1.505 9	1.769 2	2.778 9	7.460 8
网络可靠度计算结果	0.768 8	0.809 2	0.831 2	0.869 4	0.894 9

4 结 论

针对相依失效生命线网络动力地震可靠度计算中的高维 Gumbel Copula 参数估计难题,提出关于秩相依系数 Kendall's tau 的外推公式,进行高维 ($n > 60$) Gumbel Copula 参数的有效估计。基于高维 Gumbel Copula 参数的近似估计,计算生命线网络不交最小路(割)的联合发生概率,将联合概率计算公式代入递推分解算法,发展出大型相依失效生命线网络动力地震可靠度的有效计算方法。最后,通过某实际 220 kV 变电站一次设备(支架)网络动力地震可靠度的计算,验证了所建立算法的有效性。主要结论如下:

(1)关于秩相依系数 Kendall's tau 的外推公式,通过低维情况下,待估参数 θ 与 \hat{t}_n 的非线性拟合,得到 Gumbel Copula 参数估计的外推公式该方法能够实现高维 Gumbel Copula 参数的有效估计,提高了高维 Gumbel Copula 参数估计的计算效率。

(2)基于高维 Gumbel Copula 的递推算法,由广义极值分布模型估计系统元件极值地震响应的概率分布,由外推公式进行高维 Gumbel Copula 参数估计,建立 Gumbel Copula 函数,结合 e-RDA 算法计算不交最小路(割)的联合失效概率,将结果代回递推分解算法中得到系统可靠度计算结果,该方法扩大了原有算法适用系统规模,能够在有限时间内实现大型相依失效生命线网络动力地震可靠度计算。

本文方法适用于多数大型生命线工程系统相依失效动力地震可靠度计算,对于外推公式的准确性后续将做进一步的研究。

参考文献:

[1] 李杰,李国强.地震工程学导论[M].北京:地震出版社,1992.

Li J, Li G Q. Earthquake engineering introduction[M]. Beijing: Seismological Press, 1992.(in Chinese)

[2] 贺金川,刘晓航,郑山锁等.基于三角形算法的电力系统连通可靠性分析[J].防灾减灾工程学报,2020,40(5):764-70.
He J C, Liu X H, Zheng S S, et al. Connectivity reliability analysis of power system based on triangle algorithm [J].Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering,2020, 40(5): 764-70.(in Chinese)

[3] Satish J K, William E F. Determination of reliability using event-based Monte Carlo simulation part II [J]. IEEE Transactions on Reliability, 1976, 25 (4) : 254-255.

[4] Easton M C, Wong C K. Sequential destruction method for Monte Carlo evaluation of system reliability[J]. IEEE Transactions on Reliability, 1980;29(1):27-32.

[5] Kumamoto H, Tanaka K, Inoue K, et al. Dagger-sampling Monte Carlo for system unavailability evaluation [J]. IEEE Transactions on Reliability, 1980, 29 (2) : 122-125 .

[6] Freidman S J, Supowit K J. Finding the optimal variable ordering for binary decision diagrams [J]. IEEE Transactions on Computers, 1990, 39(5):710-713.

[7] Lee C. Representation of switching circuits by binary decision programs [J]. Bell System Technical Journal, 1959, 38(4): 985-999.

[8] 何军.生命线工程网络系统抗震可靠度分析方法研究[D].上海:同济大学,2002.
He J. Research on seismic reliability analysis method of lifeline engineering network system [D]. Shanghai: Tongji University, 2002. (in Chinese)

[9] 何军,李杰.大型相关失效工程网络系统可靠度的近似算法[J].计算力学学报,2003,20(3):261-266.
He J, Li J. Approximate method for large engineering network system with correlation failure [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2003, 20 (3) : 261-266. (in Chinese)

[10] 包元锋,李杰.生命线工程网络抗震可靠性分析方法的比较研究[J].防灾减灾工程学报,2004,24(2):

- 139-148.
- Bao Y F, Li J. A comparison research on the methods of analyzing lifeline systems' seismic reliability [J]. Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering, 2004, 24(2): 139-148. (in Chinese)
- [11] He J. An extended recursive decomposition algorithm for dynamic seismic reliability evaluation of lifeline networks with dependent component failures [J]. Reliability Engineering and System Safety, 2021, 215: 107929.
- [12] Kang W, Song J. Evaluation of multivariate normal integrals for general systems by sequential compounding [J]. Structural Safety, 2010, 32(1): 35-41.
- [13] 顾倩, 夏恒, 何军. 相依失效生命线工程系统抗震可靠度估计的统一 RDA 算法 [J]. 工程力学, 2020, 37(10): 155-167.
- Gu Q, Xia H, He J. A unified RDA for the seismic reliability estimation of dependent failure lifeline engineering systems [J]. Engineering Mechanics, 2020, 37(10): 155-167. (in Chinese)
- [14] Nelsen R B. An introduction to Copulas [M]. New York: Springer, 2006.
- [15] 李述山, 王新慧, 王迪. Archimedean copula 函数参数估计方法的比较 [J]. 统计与决策, 2016(18): 75-77.
- Li S S, Wang X H, Wang D. Comparison of Archimedean copula function parameter estimation methods [J]. Statistics and Decision, 2016(18): 75-77. (in Chinese)
- [16] 杜江, 陈希镇, 于波. Archimedean Copula 函数的参数估计 [J]. 科学技术与工程, 2009, 9(3): 637-640.
- Du J, Chen X Z, Yu B. Parameter estimation of Archimedean Copula [J]. Science Technology and Engineering, 2009, 9(3): 637-640. (in Chinese)
- [17] Eryilmaz S. Multivariate copula based dynamic reliability modeling with application to weighted-k-out-of-n systems of dependent components [J]. Structural Safety, 2014, 51:23-28.
- (本文编辑:赵霞)



(上接第 209 页)

- [5] 王鹏宇, 王述红, 朱承金. 城市地下管廊结构地震动力响应分析 [J]. 东北大学学报 (自然科学版), 2019, 40(7): 1020-1027.
- Wang P Y, Wang S H, Zhu C J. Seismic dynamic response analysis of urban underground utility tunnel structure [J]. Journal of Northeastern University (Natural Science), 2019, 40(7): 1020-1027. (in Chinese)
- [6] 仇文岗, 韩亮, 陈志雄, 等. 双仓综合管廊抗震性能模型试验研究 [J]. 岩土工程学报, 2020, 42(1): 100-108.
- Zhang W G, Han L, Chen Z X, et. Model tests on seismic performance of double-box underground utility tunnel [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2020, 42(1): 100-108. (in Chinese)
- [7] Wei L, Song Z Y, Wang Y C. Seismic analysis of the connections of buried segmented pipes [J]. Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2020, 123(1): 257-282.
- [8] Zhao W S, Chen W Z. Effect of near-fault ground motions with long-period pulses on the tunnel [J]. Journal of Vibroengineering, 2015, 17(2): 841-858.
- [9] Liu W, Wu Q. Comparison between the seismic performance of buried pipes and pipes in a utility tunnel [J]. Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2020, 123(2): 661-690.
- [10] Lee J, Fenves G L. Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1998, 124(8): 892-900.
- [11] 混凝土结构设计规范 (2015 年版): GB 50010—2010 [S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2015.
- [12] Kiyomiya O. Earthquake-resistant design features of immersed tunnels in Japan [J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 1995, 10(4): 463-475.
- [13] Anastasopoulos I, Gerolymos N, Drosos V, et al. Nonlinear response of deep immersed tunnel to strong seismic shaking [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2007, 133(9): 1067-1090.
- [14] 陈磊, 陈国兴, 李丽梅. 近场和远场地震动作用下双层竖向重叠地铁隧道地震反应特性 [J]. 中国铁道科学, 2010, 31(1): 79-85.
- Chen L, Chen G X, Li L M. Seismic response characteristics of double-layer vertical overlapping subway tunnels under the vibration of near-field and far-field sites [J]. China Railway Science, 2010, 31(1): 79-85. (in Chinese)
- [15] Cui Z, Sheng Q, Leng X. Effects of a controlling geological discontinuity on the seismic stability of an underground cavern subjected to near-fault ground motions [J]. Bulletin of Engineering Geology & the Environment, 2018, 77(1): 265-282.
- [16] 寇有振. 预制预应力综合管廊受力性能研究 [D]. 西安: 长安大学, 2018.
- Kou Y Z. Study on mechanical performance of precast prestressed utility tunnel [D]. Xi'an: Chang'an University, 2018. (in Chinese)